Gebrochen-rationale Funktionen • Grundlagen
Übung

1. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ heißt **Hyperbel**. Geben Sie die maximale Definitionsmenge dieser Funktion an und begründen Sie, dass sie keine Nullstellen besitzt. Zeichnen Sie anschließend die Hyperbel im Bereich $x \in [-4; 4]$.

2. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_{max} und alle Nullstellen folgender gebrochen-rationaler Funktionen:

   a) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

   b) $f(x) = \frac{2x+6}{-x-3}$

   c) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$

   d) $f(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x-5)(x+4)}$

   e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

   f) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-35x}{x^2+8x+15}$

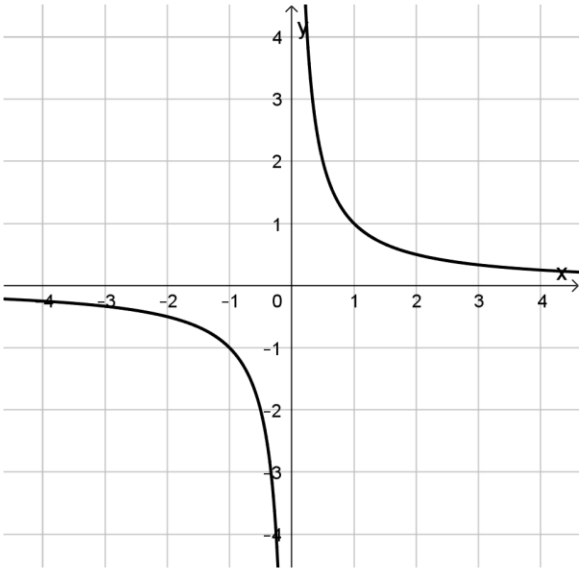
3. Skizzieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle den Graphen der Funktion mit

$$f(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2+x-3}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3}$$

im Bereich $-7 \leq x \leq 6$.

Gebrochen-rationale Funktionen
Lösung

1. $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die Hyperbel besitzt keine Nullstellen, da Ihr Zähler nicht null werden kann.



2.

a) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Nullstelle bei $x_1 = 2$

b) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
Bei $x_1 = -3$ liegt keine Nullstelle vor, da dieser Wert nicht in D_{max} liegt.
Fazit: Keine Nullstelle.

c) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}$
$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$
Nullstelle $x_1 = 3$, bei $x_2 = -1$ liegt wegen D_{max} keine Nullstelle vor.

d) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 3; 5\}$, die Definitionslücken können ohne Rechnung abgelesen werden.
Nullstelle: $x_1 = -2$

e) $D_{max} = \mathbb{R}$, der Nenner besitzt keine Nullstellen.
Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 2$

f) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-5; -3\}$
Nullstellen: $x_1 = 0$; $[x_2 = -5 \notin D_{max}]$; $x_3 = 7$

3. Wertetabelle der gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2+x-3}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3}$

(auf zwei Nachkommastellen gerundet!)

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,13	0,00	-0,25	-1,00	/	2,00	1,25	1,00	0,88	/	0,75	0,71	0,69	0,67

x	-3,3	-3,2	-3,1	-3,05	-3,01	-2,99	-2.95	-2,9	-2,8	-2,7
f(x)	-4,5	-7,00	-14,50	-29,50	-149,50	150,50	30,50	15,50	8,00	5,50

x	1,7	1,8	1,9	1,95	1,99	2,01	2,05	2,1	2,2	2,3
f(x)	0,82	0,81	0,81	0,80	0,80	0,80	0,80	0,79	0,79	0,78